Katholieke Universiteit Leuven

Departement Elektrotechniek

ESAT-SISTA/TR 1994-88

Higher-Order Power Methods [1]

Lieven De Lathauwer[2] Bart De Moor[3] Joos Vandewalle

December 1994

Extract from:
L. De Lathauwer
Signaalverwerking m.b.v. Hogere-Orde Tensoren
Jaarverslag 1e mandaat specialisatiebeurs I.W.T.
Sept. 1994

[1]This report is available by anonymous ftp from *ftp.esat.kuleuven.ac.be* in the directory *pub/SISTA/delathau/reports/ldl-94-88.ps.Z*

[2]ESAT - Katholieke Universiteit Leuven, Kardinaal Mercierlaan 94, 3001 Leuven (Heverlee), Belgium, tel 32/16/32 11 11, fax 32/16/32 19 86, email: *Lieven.DeLathauwer@esat.kuleuven.ac.be.* Lieven De Lathauwer is a research assistant with the I.W.T. (Flemish Institute for Support of Scientific-Technological Research in Industry). The research reported in this paper was partially supported by the Belgian Institute for Scientific Research in Industry and Agriculture (I.W.O.N.L.) and the Belgian Programme on Interuniversity Poles of Attraction (IUAP-17, IUAP-50), initiated by the Belgian State, Prime Minister's Office for Science, Technology and Culture. It was also supported by the European Community Research program ESPRIT, Basic Research Working Group nr. 6620 (ATHOS). The scientific responsibility rests with its authors.

[3]Bart De Moor is a research associate with the N.F.W.O. (Belgian National Fund for Scientific Research).

1. Rang-1 HO Methode van de Machten

In [1] werd een methode gesuggereerd voor de berekening van de beste rang-1 benadering van tensoren. We hebben dit verder verfijnd tot Alg. 1, geformuleerd voor $\mathbb{A} \in \Re^{I \times I \times I}$.

Algoritme 1
Rang-1 HO Methode van de Machten

1. *Kies I orthonormale startwaarden* $\{X_i^{(0)}\}_{1 \leq i \leq I}$
2. $\forall i$: *Itereer tot convergentie over:*
   (a) $Y^{(k)} = \mathbb{A} \times_1 X_i^{(k)} \times_2 X_i^{(k)}$
   (b) $X_i^{(k+1)} = Y^{(k)} / \|Y^{(k)}\|$; $\lambda_i^{(k+1)} = \|Y^{(k)}\|$

   Geconvergeerde waarden: $\{\lambda_i^{(\infty)}, X_i^{(\infty)}\}$
3. *Minimiseer over i:* $\|\mathbb{A} - \lambda_i^{(\infty)} X_i^{(\infty)} \circ X_i^{(\infty)} \circ X_i^{(\infty)}\|$
   Minimum bij i_{opt}
4. $\lambda = \lambda_{i_{opt}}^{(\infty)}$; $X = X_{i_{opt}}^{(\infty)}$

We hebben de convergentie van dit algoritme aangetoond voor tensoren met diagonale kern. Dergelijke tensoren kunnen in dyadische ontbinding geschreven worden als

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i X_i \circ X_i \circ X_i \tag{1}$$

waarbij we aannemen dat de veralgemeende eigenwaarden voldoen aan $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_I|$.

Na de berekening van de beste rang-1 benadering van $\mathbb{A}$, kan de beste rang-2 benadering bekomen worden door bijkomend Alg. 1 toe te passen op het residu $\mathbb{A} - \lambda_1 X_1 \circ X_1 \circ X_1$. In het algemeen bekomt men de beste rang-P benadering van $\mathbb{A}$ door Alg. 1 herhaaldelijk toe te passen op de opeenvolgende residu's. Deze werkwijze kan echter niet gevolgd worden voor tensoren die niet aan de voorwaarden van Verg. (1) voldoen: in tegenstelling tot de situatie bij matrices, leidt de berekening van de beste rang-P benadering voor HO tensoren in het algemeen tot een sterk gekoppeld probleem.

2. Rang-P HO Methode van de Machten

De gezamenlijke berekening van de componenten in de ontbinding van Verg. (1), heeft ons geleid tot Alg. 2. Ook voor dit algoritme werd, onder de voorwaarden van Verg. (1), convergentie bewezen.

Algoritme 2
Rang-P HO Methode van de Machten

1. *Kies* $Z^{(0)} \in \Re^P$
2. *Itereer tot convergentie, of tot* $k = k_{max}$, *over:*
   (a) $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbb{A} \times_1 Z^{(k)}$
   (b) $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)}\mathbf{D}^{(k)}\mathbf{X}^{(k)^t}$ *(EWO)*
   Orden de eigenwaarden $\{d_p^{(k)}\}_{1\leq p\leq P}$
   zodat $|d_1^{(k)}| \geq |d_2^{(k)}| \geq \ldots \geq |d_P^{(k)}|$
   Normaliseer de eigenvectoren $\{X_p^{(k)}\}_{1\leq p\leq P}$
   zodat hun, qua absolute waarde, grootste element positief teken heeft.
   (c) $\forall p$: $\lambda_p^{(k)} = sign(d_p^{(k)})\sqrt{|d_p^{(k)}|}$
   (d) $Z^{(k+1)} = \sum_p sign(d_p^{(k)})\, X_p^{(k)}$

3. Hogere-Orde "Power" Eigenwaardenontbinding

Voor tensoren die de voorwaarden van Verg. (1) slechts bij benadering voldoen, blijkt Alg. 2 te convergeren naar een nieuwe interessante veralgemening van de EWO van symmetrische matrices, de *HO "Power" EWO*, gedefinieerd in Stelling 1. Wanneer de afwijking groter wordt, kunnen limietcycli optreden.

Stelling 1 Hogere-Orde "Power" Eigenwaardenontbinding

Voor elke $(I \times I \times I)$*-tensor* $\mathbb{A}$ *die voldoet aan de voorwaarden van Verg. (1), bestaat er een omgeving* $\mathcal{O}$ *zodat alle* $\hat{\mathbb{A}} \in \mathcal{O}$ *kunnen geschreven worden als het produkt*

$$\hat{\mathbb{A}} = (\mathbb{S} + \mathbb{E}) \times_1 \mathbf{X} \times_2 \mathbf{X} \times_3 \mathbf{X} \tag{2}$$

waarbij:

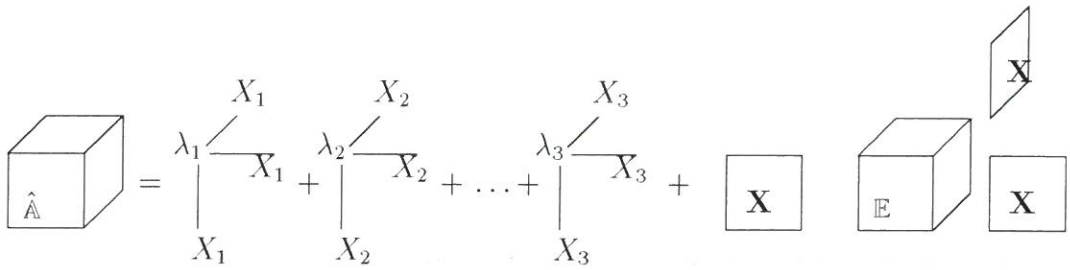
- $\mathbf{X} = [X_1 X_2 \ldots X_I]$ *is een orthogonale* $(I \times I)$*-matrix*

- $\mathbb{S}$ *is een* $(I \times I \times I)$*-diagonaaltensor waarvan de diagonaalelementen* s_{iii} *de eigenschap hebben dat* $S = [s_{111}\, s_{222} \ldots s_{III}]^t$ *in de nulruimte ligt van de* $(I^2 \times I)$*-matrixontwikkeling* $\mathbf{E}_{(I^2 \times I)}$ *van* $\mathbb{E}$*, m.a.w.*

$$\mathbf{E}_{(I^2 \times I)} \cdot S = 0$$

$$of \quad \mathbb{E} \times_1 S = \mathbb{E} \times_2 S = \mathbb{E} \times_3 S = 0$$

De diagonaalelementen s_{iii} *kunnen geïnterpreteerd worden als veralgemeende eigenwaarden van* $\hat{\mathbb{A}}$ *en de vectoren* X_i *als veralgemeende eigenvectoren. De ontbinding wordt gevisualiseerd in Fig. 1.*



Figuur 1: Visualisatie van de HO "Power" EWO van een derde-orde tensor.

Het meest opvallende verschil t.o.v. de EWO van symmetrische matrices is het opduiken van de residutensor $\mathbb{E}$. De tweede-orde eigenschap dat dit residu 0 is, vinden we voor derde-orde tensoren terug in de verzwakte eis dat $\mathbb{E} \times_i S = 0$. Bovendien is de decompositie niet altijd gedefinieerd, maar slechts gegarandeerd voor tensoren die voldoende dicht de voorwaarden van Verg. (1) benaderen. Tenslotte is de tensor $\mathbb{S} + \mathbb{E}$ slechts "zeer" diagonaal - de afwijking van maximale diagonaliteit is van de grootte-orde van de perturbatie $\|\mathbb{A} - \hat{\mathbb{A}}\|$.

Tot slot willen we nog vermelden dat voor tensoren die voldoen aan de voorwaarden van Verg. (1) de HOEWO de HO "Jacobi" EWO en de zojuist beschreven HO "Power" EWO samenvallen. Indien de voorwaarden slechts benaderend voldaan zijn, zijn de ontbindingen ook slechts benaderend gelijk.

Referenties

[1] M. Schmutz, "Optimal and suboptimal separable expansions for 3D-signal processing", *Pattern Recognition Letters*, No. 8, November 1988, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, pp. 217-220.