Katholieke Universiteit Leuven

Departement Elektrotechniek

ESAT-SISTA/TR 1994-87

Reconstruction of Multidimensional Harmonics by means of Higher-Order Matrices [1]

Lieven De Lathauwer[2] Bart De Moor[3] Joos Vandewalle

December 1994

Extract from:
L. De Lathauwer
Signaalverwerking m.b.v. Hogere-Orde Tensoren
Jaarverslag 1e mandaat specialisatiebeurs I.W.O.N.L.
Sept. 1993

[1]This report is available by anonymous ftp from *ftp.esat.kuleuven.ac.be* in the directory *pub/SISTA/delathau/reports/ldl-94-87.ps.Z*

[2]ESAT - Katholieke Universiteit Leuven, Kardinaal Mercierlaan 94, 3001 Leuven (Heverlee), Belgium, tel 32/16/32 11 11, fax 32/16/32 19 86, email: *Lieven.DeLathauwer@esat.kuleuven.ac.be.* Lieven De Lathauwer is a research assistant with the I.W.T. (Flemish Institute for Support of Scientific-Technological Research in Industry). The research reported in this paper was partially supported by the Belgian Institute for Scientific Research in Industry and Agriculture (I.W.O.N.L.) and the Belgian Programme on Interuniversity Poles of Attraction (IUAP-17, IUAP-50), initiated by the Belgian State, Prime Minister's Office for Science, Technology and Culture. It was also supported by the European Community Research program ESPRIT, Basic Research Working Group nr. 6620 (ATHOS). The scientific responsibility rests with its authors.

[3]Bart De Moor is a research associate with the N.F.W.O. (Belgian National Fund for Scientific Research).

1. Inleiding

We leiden een nieuw algoritme af voor het gekende probleem van "Direction-of-Arrival". Het maakt gebruik van tensortechnieken om de driedimensionele invalsrichting van smalbandige signalen op een antennerooster te bepalen.

De nieuwe techniek werd bekomen door eerst het algemener probleem op te lossen van de decompositie van een "beeld" in de harmonischen waaruit het werd samengesteld. De methode voor tweede-orde wordt beschreven in de literatuur [1]. Zij wordt bondig uiteengezet in § 2. Nieuw is de veralgemening tot hogere-orde beelden, beschreven in § 3. In dit concrete geval kan het onderliggende tensormechanisme ook vrij eenvoudig worden geformuleerd m.b.v. matrices, zij het wel door gebruik te maken van het Kroneckerprodukt. De matrixformulering wordt voorgesteld in § 4. In § 5 wordt de link gelegd van de reconstructie van harmonischen naar het bepalen van de invalsrichting op een antennestructuur. In § 6 tenslotte, wordt een efficiënt rekenschema afgeleid voor het hogere-orde algoritme. Het maakt gebruik van principes van realisatietheorie.

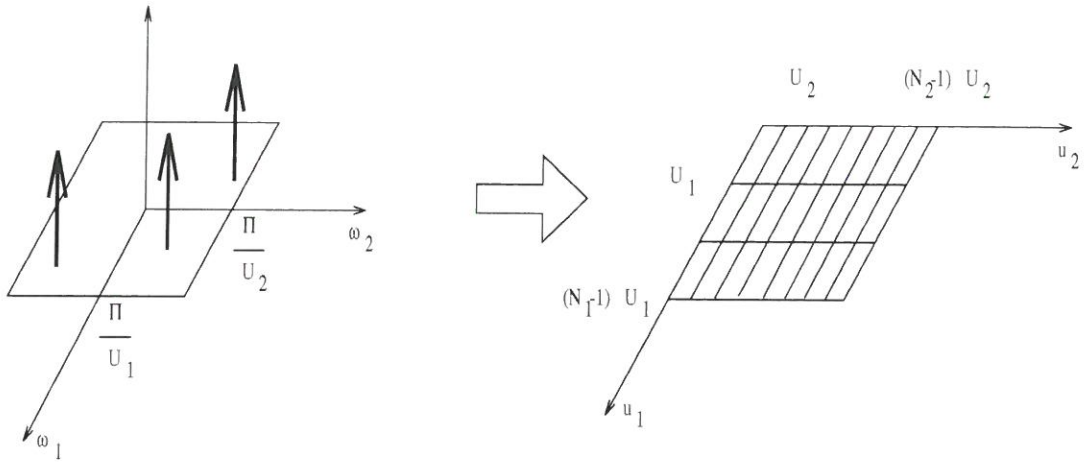
2. Het tweede-orde basisprobleem

2.1. Formulering van de probleemstelling

Beschouw een $(N_1 \times N_2)$-beeldmatrix S, verkregen door bemonstering over afstanden U_1 en U_2 van het signaal

$$s(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{R} A_i e^{j(\omega_{1,i} u_1 + \omega_{2,i} u_2)}$$

dat bestaat uit een superpositie van R impulsen in het Nyquist-domein: $\omega_{1,i} \leq \frac{\pi}{U_1}$; $\omega_{2,i} \leq \frac{\pi}{U_2}$ (figuur 1). We willen het tweedimensioneel beeld S nu opsplitsen in de sinusoïden waaruit het werd samengesteld.



Figuur 1: Het bestudeerde beeld wordt bekomen door bemonstering van een superpositie van impulsen in het Nyquist-domein.

2.2. Oplossingsmethode voor het tweede-orde basisprobleem

Noteren we $\Phi_i \triangleq e^{j\omega_{1,i}U_1}$ en $\Psi_i \triangleq e^{j\omega_{2,i}U_2}$, en definiëren we de vectoren X_i en Y_i als

$$X_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \Phi_i \\ \vdots \\ \Phi_i^{N_1-1} \end{bmatrix} \qquad Y_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \Psi_i \\ \vdots \\ \Psi_i^{N_2-1} \end{bmatrix}$$

dan geldt

$$S = \sum_{i=1}^{R} A_i \; X_i Y_i^t \tag{1}$$

S is duidelijk van rang R indien alle waarden van Φ_i (en Ψ_i) onderling verschillen. Definieer vervolgens $X \in \mathfrak{C}^{N_1 \times R}$, $Y \in \mathfrak{C}^{N_2 1 \times R}$ en $A \in \mathfrak{C}^{R \times R}$ als

$$\begin{aligned} X &\triangleq [X_1 X_2 \cdots X_R] \\ Y &\triangleq [Y_1 Y_2 \cdots Y_R] \\ A &\triangleq \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_R) \end{aligned}$$

dan wordt de matrixvorm van (1) gegeven door

$$S = XAY^t \tag{2}$$

De reconstructie van de harmonischen gebeurt door gebruik te maken van de Vandermondestructuur van X en Y. De methode is een toepassing van realisatietheorie [1] [2].

Definieer $\overline{S}$, $\underline{S}$, $|S$ en $S|$ als de matrices bekomen uit S door respectievelijk de eerste rij, de laatste rij, de meest linkse kolom en de meest rechtse kolom weg te laten. Analoge definities gelden voor $\overline{X}$, $\underline{X}$, $\overline{Y}$ en $\underline{Y}$.

Uit

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{X}AY^t \\ \underline{S} &= \underline{X}AY^t \end{aligned}$$

en het verband ten gevolge van de Vandermondestructuur

$$\overline{X} = \underline{X}\Phi \text{ met } \Phi = \text{diag}(\Phi_i)$$

volgt dat alle Φ_i en X_i kunnen bepaald worden uit het veralgemeend eigenwaardeprobleem van de matrix pencil $\overline{S} - \lambda\underline{S}$:

$$\overline{S} - \lambda\underline{S} = \underline{X}(\Phi - \lambda I)AY^t \tag{3}$$

waaruit blijkt dat $\lambda = \Phi_i$ de rang van $\overline{S} - \lambda\underline{S}$ verlaagt tot $R-1$. Ψ_i en Y_i worden analoog bepaald uit de veralgemeende eigenwaarden van de pencil $|S - \lambda\, S|$:

$$|S - \lambda\, S| = XA(\Psi - \lambda I)\underline{Y}^t \tag{4}$$

De amplitudes A_i kunnen worden bepaald door het stelsel (2) op te lossen in de zin van kleinste kwadraten. Zo blijkt welke Φ_i $(\omega_{1,i})$ met welke Ψ_j $(\omega_{2,j})$ correspondeert.

3. Uitbreiding tot hogere orde

We behandelen bij wijze van voorbeeld de derde-orde uitbreiding. Uitbreidingen tot orde 4 of hoger, zijn volledig analoog.

Alvorens het probleem aan te pakken, definiëren we de rang van een derde-orde tensor. Die zal immers aanleiding geven tot een belangrijk verschil t.o.v. de tweede-orde situatie.

Definitie 0.1 *Een derde-orde tensor $\mathbb{T}$ is van rang 1 als hij kan genoteerd worden als het tensor uitwendig produkt van drie vectoren V_1, V_2, V_3:*

$$\mathbb{T} = V_1 \circ V_2 \circ V_3$$

Definitie 0.2 *De rang van een willekeurige tensor $\mathbb{T}$ wordt gedefinieerd als het minimum aantal rang-1 tensoren die in een lineaire combinatie $\mathbb{T}$ opleveren.*

Deze definitie geeft een uitbreiding van het concept "rang van een matrix".

Definitie 0.3 *De kolomrang, rijrang en "pijprang" (Engels: "tube rank") van een derde-orde tensor $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_{ijk})$ worden gedefinieerd als de dimensie van resp. kolomruimte (index i), rijruimte (index j), en ruimte gevormd door de vectoren van de derde mode (index k).*

In tegenstelling tot het matrixgeval zijn deze grootheden bij tensoren in het algemeen verschillend.

Beschouw nu de $(N_1 \times N_2 \times N_3)$-tensor $\mathbb{S}$, gegeven door

$$\mathbb{S} = \sum_{i=1}^{R} A_i \, X_i \circ Y_i \circ Z_i \tag{5}$$

met X_i, Y_i, Z_i gedefinieerd als

$$X_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \Phi_i \\ \vdots \\ \Phi_i^{N_1-1} \end{bmatrix} \qquad Y_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \Psi_i \\ \vdots \\ \Psi_i^{N_2-1} \end{bmatrix} \qquad Z_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \Lambda_i \\ \vdots \\ \Lambda_i^{N_3-1} \end{bmatrix}$$

en waarin $\circ$ het tensor uitwendig produkt aangeeft.

Definieer vervolgens $X \in \mathfrak{C}^{N_1 \times R}$, $Y \in \mathfrak{C}^{N_2 \times R}$, $Z \in \mathfrak{C}^{N_3 \times R}$ en $\mathbb{A} \in \mathfrak{C}^{R \times R \times R}$ als

$$\begin{aligned} X &\triangleq [X_1 X_2 \cdots X_R] \\ Y &\triangleq [Y_1 Y_2 \cdots Y_R] \\ Z &\triangleq [Z_1 Z_2 \cdots Z_R] \\ \mathbb{A} &\triangleq \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_R) \end{aligned}$$

dan wordt (5) in veralgemeende index-notatie gegeven door

$$\mathbb{S}_{ijk} = \mathbb{A}_{rst} X_i^r Y_j^s Z_k^t \tag{6}$$

Definieer tenslotte $(\mathbb{S}_{\overline{i}jk})$ en $(\mathbb{S}_{\underline{i}jk})$ als de tensoren, bekomen uit $(\mathbb{S}_{ijk})$ door de matrices weg te laten die respectievelijk met $i = 1$ en $i = N_1$ corresponderen. We leggen er de nadruk op dat de over- of onderlijning belang heeft voor de definitie van de tensor, maar niet voor de index zelf (behalve dan het verminderde bereik). Analoge definities gelden voor afknotting van de andere modes.

Uit

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\overline{i}jk} &= \mathbb{A}_{rst}\overline{X}_i^r Y_j^s Z_k^t & (7)\\ \mathbb{S}_{\underline{i}jk} &= \mathbb{A}_{rst}\underline{X}_i^r Y_j^s Z_k^t & (8)\\ \overline{X}_i^r &= \underline{X}_i^u \Phi_u^r & (9) \end{aligned}$$

volgt dat alle Φ_i en X_i kunnen bepaald worden als resp. eigenwaarden en eigenvectoren van de tensor pencil $(\mathbb{S}_{\overline{i}jk}) - \lambda(\mathbb{S}_{\underline{i}jk})$:

$$\mathbb{S}_{\overline{i}jk} - \lambda\mathbb{S}_{\underline{i}jk} = \mathbb{A}_{rst}\underline{X}_i^u(\Phi_u^r - \lambda\delta_u^r)Y_j^s Z_k^t \qquad (10)$$

Indien $\lambda = \Phi_i$, dan verlaagt de kolomrang van $(\mathbb{S}_{\overline{i}jk}) - \lambda(\mathbb{S}_{\underline{i}jk})$ tot $R - 1$. Ψ_i en Λ_i worden analoog bepaald. De amplitudes A_i volgen uit het lineaire stelsel (6).

Het belangrijke verschil ten opzichte van de tweede-orde situatie bestaat erin dat $\lambda = \Phi_i$ niet noodzakelijk "dé" rang van $(\mathbb{S}_{\overline{i}jk}) - \lambda(\mathbb{S}_{\underline{i}jk})$ verlaagt. Alleen de kolomrang, dus de dimensie van de kolomruimte van $(\mathbb{S}_{\overline{i}jk}) - \lambda(\mathbb{S}_{\underline{i}jk})$ verlaagt. Dit verschil komt duidelijk tot uiting wanneer men de betrokken tensoren ontwikkelt tot matrices.

4. Formulering van de uitbreiding m.b.v. matrices

Definieer $S_1 \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 N_3}$, $S_2 \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_3 N_1}$, $S_3 \in \mathbb{C}^{N_3 \times N_1 N_2}$ als de matrixontwikkelingen van $\mathbb{S}$, waarbij de eerste index in een produkt $N_k N_l$ trager varieert dan de tweede. A_1, A_2 en A_3 zijn de corresponderende matrixontwikkelingen van de diagonaaltensor $\mathbb{A}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} S_1 &= XA_1(Y \otimes Z)^t = XA_1(Y^t \otimes Z^t)\\ S_2 &= YA_2(Z \otimes X)^t = YA_2(Z^t \otimes X^t)\\ S_3 &= ZA_3(X \otimes Y)^t = ZA_3(X^t \otimes Y^t) \end{aligned}$$

waarbij $\otimes$ de notatie is voor het Kroneckerprodukt.
Het matrix-equivalent van (7), (8) en (10) wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned} \overline{S}_1 &= \overline{X}A_1(Y \otimes Z)^t & (11)\\ \underline{S}_1 &= \underline{X}A_1(Y \otimes Z)^t & (12) \end{aligned}$$

$$\overline{S}_1 - \lambda \underline{S}_1 = \underline{X}(\Phi - \lambda I) A_1 (Y \otimes Z)^t \tag{13}$$

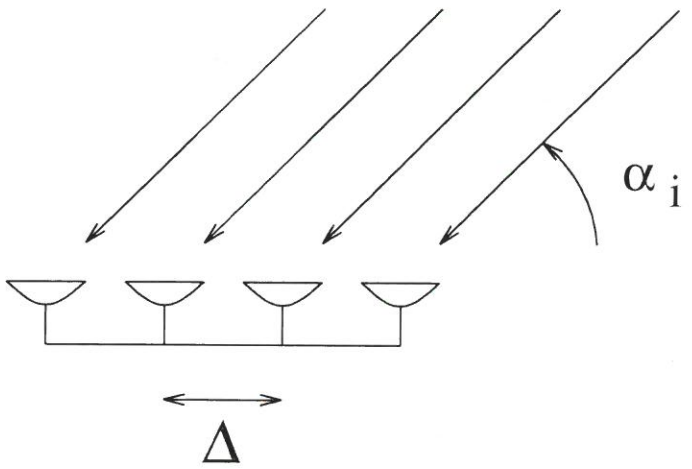
waaruit blijkt dat $\lambda = \Phi_i$ de rang van $\overline{S}_1 - \lambda \underline{S}_1$ verlaagt tot $R - 1$.

De onbekende Ψ_i en Λ_i worden bekomen uit de *andere* matrixontwikkelingen $\overline{S}_2 - \lambda \underline{S}_2$ en $\overline{S}_3 - \lambda \underline{S}_3$.

5. Verband met bepaling van de invalsrichting op een antennerij

5.1. Verband voor het tweede-orde basisprobleem

Beschouw de uniforme lineaire antennerij van figuur 2. Vanuit de richtingen α_i



Figuur 2: Uniforme lineaire antennerij

$(1 \leq i \leq R)$ vallen smalbandige signalen in (bv. AM-gemoduleerde spraaksignalen op een draaggolf met frequentie f_i). Bemonstering gebeurt aan een snelheid van $1/T$ Hz.

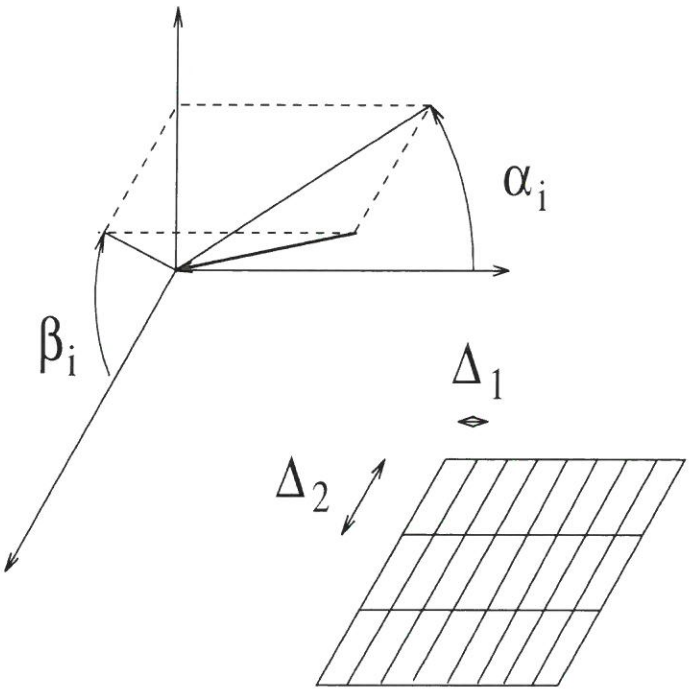
De matrix S van het tweede-orde basisprobleem wordt geconstrueerd door de uitgangen van de antennerij op de verschillende bemonsteringstijdstippen als kolomvectoren naast elkaar te plaatsen. Het verband tussen de onbekenden Φ_i en Ψ_i enerzijds en de invalshoeken α_i en draagfrequenties f_i anderzijds, wordt gegeven

door

$$\begin{aligned} \Phi_i &= e^{j2\pi f_i \frac{\Delta}{c} \cos\alpha_i} \\ \Psi_i &= e^{j2\pi f_i T} \end{aligned}$$

met c de voortplantingssnelheid van de golf.

5.2. Verband voor de hogere-orde uitbreiding



Figuur 3: Tweedimensioneel antennerooster

Een volledige ruimtelijke scheiding van de bronsignalen, wordt bekomen met een tweedimensioneel antennerooster (figuur 3). De methode om deze signaalscheiding te realiseren, is de derde-orde uitbreiding besproken in vorige paragrafen. Het verband tussen de parameters α_i, β_i en f_i enerzijds en de onbekenden Φ_i, Ψ_i en Λ_i anderzijds, wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \Phi_i &= e^{j2\pi f_i \frac{\Delta_1}{c} \cos\alpha_i} \\ \Psi_i &= e^{j2\pi f_i \frac{\Delta_2}{c} \cos\beta_i} \\ \Lambda_i &= e^{j2\pi f_i T} \end{aligned}$$

met c de voortplantingssnelheid van de golf.

6. Efficiënte berekening

Zoals het tweede-orde basisprobleem werd geschetst, vereist het de bepaling van twee keer R eigenwaarden van de veralgemeende eigenwaardenproblemen (3) en (4), samen met de oplossing van het stelsel (2), in kleinste kwadraten, naar de R^2 onbekende elementen van de matrix A.

Vertrekkend van het basisschema uit §§ 3-4 werden rekenefficiënter methodes ontwikkeld. Efficiënte methodes zijn belangrijk om de signaalverwerkingscapaciteit in bijvoorbeeld reële-tijd telecommunicatietoepassingen op te drijven. We breiden de methode van [2] uit tot het derde-orde geval.

We breiden de eerder ingevoerde notaties $(\mathbb{S}_{\bar{i}jk})$ en $(\mathbb{S}_{ijk})$ uit tot symbolen van de vorm $(\mathbb{S}_{\bar{i}\bar{j}\underline{k}})$, hetgeen staat voor de $((N_1-1)\times(N_2-1)\times(N_3-1))$-tensor, bekomen uit $\mathbb{S}$ door de matrices weg te laten die corresponderen met $i=1$, $j=1$, $k=N_3$.

Voor dergelijke tensoren bestaat het volgende equivalent van formules (7) en (8):

$$\mathbb{S}_{\underline{ijk}} = \mathbb{A}_{rst}\underline{X}_i^r\underline{Y}_j^s\underline{Z}_k^t \tag{14}$$

$$\mathbb{S}_{\bar{i}\underline{jk}} = \mathbb{A}_{rst}\overline{X}_i^r\underline{Y}_j^s\underline{Z}_k^t = (\mathbb{A}_{rst}\Phi_u^r)\underline{X}_i^r\underline{Y}_j^s\underline{Z}_k^t \tag{15}$$

$$\mathbb{S}_{\underline{i}\bar{j}\underline{k}} = \mathbb{A}_{rst}\underline{X}_i^r\overline{Y}_j^s\underline{Z}_k^t = (\mathbb{A}_{rst}\Psi_v^s)\underline{X}_i^r\underline{Y}_j^v\underline{Z}_k^t \tag{16}$$

$$\mathbb{S}_{\underline{ij}\bar{k}} = \mathbb{A}_{rst}\underline{X}_i^r\underline{Y}_j^s\overline{Z}_k^t = (\mathbb{A}_{rst}\Lambda_u^t)\underline{X}_i^r\underline{Y}_j^s\underline{Z}_k^w \tag{17}$$

Noteren we de $(N_2N_3\times N_1)$-matrixontwikkeling van de $(N_1\times N_2\times N_3)$-tensor $\mathbb{S}$ als $S_{(jk\times i)}$, waarbij j trager varieert dan k, dan kunnen we de bovenstaande betrekkingen schrijven als gelijkheden van matrices:

$$\begin{aligned}
S_{(\underline{jk}\times\underline{i})} &= (\underline{Y}\otimes\underline{Z})A\underline{X}^t\\
S_{(\underline{jk}\times\bar{i})} &= (\underline{Y}\otimes\underline{Z})(A\Phi)\underline{X}^t\\
S_{(\bar{j}\underline{k}\times\bar{i})} &= (\underline{Y}\otimes\underline{Z})(A\Psi)\underline{X}^t\\
S_{(\underline{j}\bar{k}\times\underline{i})} &= (\underline{Y}\otimes\underline{Z})(A\Lambda)\underline{X}^t
\end{aligned}$$

De oplossing van het veralgemeend eigenwaardeprobleem van de matrix pencil $(\mathbb{S}_{\bar{i}\underline{jk}})-\lambda(\mathbb{S}_{\underline{ijk}})$, levert de gezochte Φ_i:

$$S_{(\underline{jk}\times\bar{i})}-\lambda S_{(\underline{jk}\times\underline{i})} = (\underline{Y}\otimes\underline{Z})A(\Phi-\lambda I)\underline{X}^t \tag{18}$$

Het veralgemeend eigenwaardeprobleem kan opgelost worden d.m.v. de eigendecompositie van

$$(S_{(\underline{j}\underline{k}\times\underline{i})})^{\dagger} S_{(\underline{j}\underline{k}\times\overline{i})} = (\underline{X}^t)^{\dagger} \Phi \underline{X}^t$$

waarin het †-teken het symbool is voor de pseudo-inverse.

De kracht van de voorgestelde methode, schuilt in het feit dat de matrix pencils voor de bepaling van Ψ_i en Λ_i dezelfde veralgemeende eigenvectoren hebben:

$$(S_{(\underline{j}\underline{k}\times\underline{i})})^{\dagger} S_{(\overline{j}\underline{k}\times\underline{i})} = (\underline{X}^t)^{\dagger} \Psi \underline{X}^t$$

$$(S_{(\underline{j}\underline{k}\times\underline{i})})^{\dagger} S_{(\underline{j}\overline{k}\times\underline{i})} = (\underline{X}^t)^{\dagger} \Lambda \underline{X}^t$$

De onbekende Vandermondeparameters kunnen dus ook bepaald worden door eenvoudig het veralgemeend eigenwaardeprobleem (18) op te lossen en vervolgens na te gaan hoe dezelfde veralgemeende eigenvectoren worden gescaleerd in de matrix pencils $(S_{(\overline{j}\underline{k}\times\underline{i})}, S_{(\underline{j}\underline{k}\times\underline{i})})$ en $S_{(\underline{j}\overline{k}\times\underline{i})}, S_{(\underline{j}\underline{k}\times\underline{i})})$.

Referenties

[1] S.Y. Kung, "A New Identification and Model Reduction Algorithm with Singular value Decomposition," *Proceedings 12th Asilomar Conference on Circuits and Systems,* Pacific Grove, California, November 1978, pp. 705-714.

[2] D.V.B. Rao, S.Y. Kung, "A State Space Approach for the 2-D Harmonic Retrieval Problem," *Proceedings ICASSP-84,* pp. 4.10.1-3.