Katholieke Universiteit Leuven

Departement Elektrotechniek

ESAT-SISTA/TR 1994-89

Geometrical Interpretation of Givens and Jacobi Rotations for Vectors, Matrices and Tensors [1]

Lieven De Lathauwer[2] Bart De Moor[3] Joos Vandewalle

December 1994

Extract from:
L. De Lathauwer
Signaalverwerking m.b.v. Hogere-Orde Tensoren
Jaarverslag 1e mandaat specialisatiebeurs I.W.T.
Sept. 1994

[1]This report is available by anonymous ftp from *ftp.esat.kuleuven.ac.be* in the directory *pub/SISTA/delathau/reports/ldl-94-89.ps.Z*

[2]ESAT - Katholieke Universiteit Leuven, Kardinaal Mercierlaan 94, 3001 Leuven (Heverlee), Belgium, tel 32/16/32 11 11, fax 32/16/32 19 86, email: *Lieven.DeLathauwer@esat.kuleuven.ac.be.* Lieven De Lathauwer is a research assistant with the I.W.T. (Flemish Institute for Support of Scientific-Technological Research in Industry). The research reported in this paper was partially supported by the Belgian Institute for Scientific Research in Industry and Agriculture (I.W.O.N.L.) and the Belgian Programme on Interuniversity Poles of Attraction (IUAP-17, IUAP-50), initiated by the Belgian State, Prime Minister's Office for Science, Technology and Culture. It was also supported by the European Community Research program ESPRIT, Basic Research Working Group nr. 6620 (ATHOS). The scientific responsibility rests with its authors.

[3]Bart De Moor is a research associate with the N.F.W.O. (Belgian National Fund for Scientific Research).

1. Inleiding

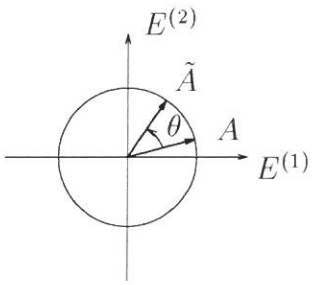
De Hogere-Orde Eigenwaardenontbinding (HOEWO) van een tensor $\mathbb{A}$ met diagonale kern vindt een belangrijke toepassing in een probleem van signaalscheiding. Deze applicatie was voor Comon in [1, 2] de aanleiding om een tensordecompositie uit te werken waarnaar we verder zullen refereren als de *HO "Jacobi" EWO*, vermits de veralgemeende eigenmatrix wordt berekend als een produkt van Jacobi-rotaties.

Voor tensoren die beantwoorden aan de gegeven diagonaliteitsvoorwaarde, vallen de HOEWO en de HO "Jacobi" EWO samen. Het Jacobi-algoritme is echter sterk niet-lineair en (voorlopig) is alleen convergentie naar een lokaal optimum gegarandeerd. Over de performantie wanneer de tensor $\mathbb{A}$ slechts bij benadering diagonaliseerbaar is, kunnen alsnog geen analytische uitspraken worden gedaan.

We hebben een geometrische interpretatie van de HO Jacobi-rotaties uitgewerkt als basis voor een, nog uit te voeren, onderzoek naar de convergentiekarakteristieken van het algoritme. Deze geometrische interpretatie werd bekomen door, vertrekkend van de eenvoudige Givens-rotatie van een vector, de complexiteit van het probleem geleidelijk op te voeren.

2. Givens-rotatie van een vector $A \in \Re^2$

Fig. 1 illustreert hoe een cirkelbaan beschreven wordt door Givens-rotatie $\tilde{A} = \mathbf{J}A$ van de vector A ($j_{11} = j_{22} = \cos\theta$ en $j_{21} = -j_{12} = \sin\theta$ [3]). In deze figuur liggen de assen volgens $E^{(1)} = [1\ \ 0]^t$ en $E^{(2)} = [0\ \ 1]^t$.



Figuur 1: Givens-rotatie van een vector $A \in \Re^2$.

3. Jacobi-rotatie van een symmetrische matrix $\mathbf{A} \in \Re^{2\times 2}$

We hebben aangetoond dat door de Jacobi-rotatie $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{J}^t$ de componenten van $\mathbf{A}$ transformeren volgens

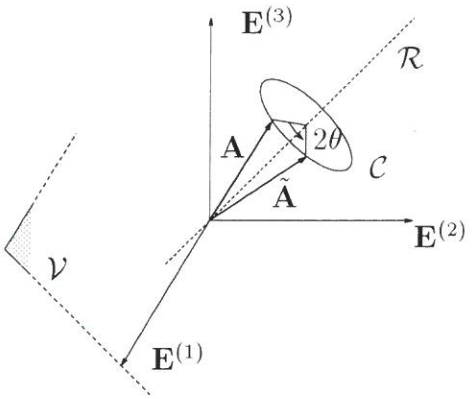
$$\mathrm{col}(\tilde{\mathbf{A}}) = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J})\mathrm{col}(\mathbf{A}) \tag{1}$$

waarbij $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [a_{11}\, a_{21}\ a_{12}\, a_{22}]^t$ (analoog voor $\mathrm{col}(\tilde{\mathbf{A}})$).

Fig. 2 illustreert hoe door deze transformatie een cirkelbaan beschreven wordt in de vectorruimte van de symmetrische (2×2)-matrices. In deze figuur liggen de assen volgens:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De rechte $\mathcal{R}$ ligt volgens de eenheidsmatrix $\mathbf{I}$ en het vlak $\mathcal{V}$ is de vectorruimte gebouwd op $\{\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{E}^{(3)} - \mathbf{E}^{(2)}\}$ De cirkel $\mathcal{C}$ is evenwijdig aan $\mathcal{V}$ en heeft middelpunt op $\mathcal{R}$. De Jacobi-rotatie gebeurt dubbel zo snel als de Givens-rotatie in Sectie 2.



Figuur 2: Jacobi-rotatie van een symmetrische matrix $\mathbf{A} \in \Re^{2\times 2}$.

4. HO Jacobi-rotatie van een geheel-symmetrische tensor $\mathbb{A} \in \Re^{2\times 2\times 2}$

We hebben aangetoond dat door de HO Jacobi-rotatie $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \times_1 \mathbf{J} \times_2 \mathbf{J} \times_3 \mathbf{J}$ de componenten van $\mathbb{A}$ transformeren volgens

$$\mathrm{col}(\tilde{\mathbb{A}}) = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J} \otimes \mathbf{J})\mathrm{col}(\mathbb{A}) \tag{2}$$

waarbij $\mathrm{col}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} [a_{111}\, a_{211}\, a_{121}\, a_{221}\, a_{112}\, a_{212}\, a_{122}\, a_{222}]^t$ (analoog voor $\mathrm{col}(\tilde{\mathbb{A}})$).

Definiëren we de eenheidstensoren $\{\mathbb{E}^{(i)}\}_{1\leq i\leq 4}$ door

$$
\begin{cases} e^{(1)}_{111} = \sqrt{3}/2 \\ e^{(1)}_{221} = e^{(1)}_{212} = e^{(1)}_{122} = \sqrt{3}/6 \\ e^{(1)}_{112} = e^{(1)}_{121} = e^{(1)}_{211} = e^{(1)}_{222} = 0 \end{cases}
\begin{cases} e^{(2)}_{222} = \sqrt{3}/2 \\ e^{(2)}_{112} = e^{(2)}_{121} = e^{(2)}_{211} = \sqrt{3}/6 \\ e^{(2)}_{221} = e^{(2)}_{212} = e^{(2)}_{122} = e^{(2)}_{111} = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} e^{(3)}_{111} = 1/2 \\ e^{(3)}_{221} = e^{(3)}_{212} = e^{(3)}_{122} = -1/2 \\ e^{(3)}_{112} = e^{(3)}_{121} = e^{(3)}_{211} = e^{(3)}_{222} = 0 \end{cases}
\begin{cases} e^{(4)}_{222} = 1/2 \\ e^{(4)}_{112} = e^{(4)}_{121} = e^{(4)}_{211} = -1/2 \\ e^{(4)}_{221} = e^{(4)}_{212} = e^{(4)}_{122} = e^{(4)}_{111} = 0 \end{cases}
$$

dan wordt door transformatie (2) een veralgemeende cirkelbaan beschreven: de componenten van $\mathbb{A}$ volgens $\{\mathbb{E}^{(1)}, \mathbb{E}^{(2)}\}$ roteren over θ en tegelijk roteren de componenten volgens $\{\mathbb{E}^{(3)}, \mathbb{E}^{(4)}\}$ over 3θ.

5. HO Jacobi-rotatie van een geheel-symmetrische tensor $\mathbb{A} \in \Re^{I\times I\times I}$

We hebben aangetoond dat door de HO Jacobi-rotatie de componenten van $\mathbb{A}$ transformeren op de manier beschreven in Sectie 2, 3 of 4, afhankelijk van welke $(2 \times 2 \times 2)$-deeltensor men precies wil diagonaliseren. Voor elk geval werd de transformatieformule opgesteld. De werkwijze kan veralgemeend worden voor tensoren van orde 4 of hoger.

Referenties

[1] P. Comon, "Independent Component Analysis and Blind Identification", *Traitement du Signal*, Special Issue *Non-linear and Non-Gaussian*, Vol. 7, No. 5, Herfst 1990, pp. 435-450.

[2] P. Comon, "Independent Component Analysis", in: J.L. Lacoume (Ed.), *Higher Order Statistics. Proceedings of the International Signal Processing Workshop on Higher Order Statistics*, Chamrousse, Frankrijk, 10-12 juli, 1991, pp. 29-38.

[3] G.H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press, 1991.