Katholieke Universiteit Leuven

Departement Elektrotechniek

ESAT-SISTA/TR 1994-91

Higher-Order Only Blind Identification via Canonical Decomposition of the Cumulant Tensor [1]

Lieven De Lathauwer[2] Bart De Moor[3] Joos Vandewalle

August 1994

Extract from:
L. De Lathauwer
Signaalverwerking m.b.v. Hogere-Orde Tensoren
Jaarverslag 1e mandaat specialisatiebeurs I.W.T.
Sept. 1994

[1] This report is available by anonymous ftp from *ftp.esat.kuleuven.ac.be* in the directory *pub/SISTA/delathau/reports/ldl-94-91.ps.Z*

[2] ESAT - Katholieke Universiteit Leuven, Kardinaal Mercierlaan 94, 3001 Leuven (Heverlee), Belgium, tel 32/16/22 09 31, fax 32/16/22 18 55, email: *Lieven.DeLathauwer@esat.kuleuven.ac.be*. Lieven De Lathauwer is a research assistant with the I.W.T. (Flemish Institute for Support of Scientific-Technological Research in Industry). The research reported in this paper was partially supported by the Belgian Institute for Scientific Research in Industry and Agriculture (I.W.O.N.L.) and the Belgian Programme on Interuniversity Poles of Attraction (IUAP-17, IUAP-50), initiated by the Belgian State, Prime Minister's Office for Science, Technology and Culture. It was also supported by the European Community Research program ESPRIT, Basic Research Working Group nr. 6620 (ATHOS). The scientific responsibility rests with its authors.

[3] Bart De Moor is a research associate with the N.F.W.O. (Belgian National Fund for Scientific Research).

1. Inleiding

Bij vorig onderzoek hebben we vooral aandacht besteed aan het benaderen van een gegeven HO matrix $\mathbb{A} \in \Re^{(I \times J \times K)}$ als

$$\mathbb{A} \simeq \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \, U_r \circ V_r \circ W_r \tag{1}$$

waarbij $R = \min\{I, J, K\}$ en waarbij $\{U_r\}_{1 \leq r \leq R}$, $\{V_r\}_{1 \leq r \leq R}$, $\{W_r\}_{1 \leq r \leq R}$ orthonormale sets van vectoren zijn. Voor geheel-symmetrische tensoren kwam dit neer op het benaderingsprobleem

$$\mathbb{A} \simeq \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \, X_i \circ X_i \circ X_i \tag{2}$$

met $\{X_i\}_{1 \leq i \leq I}$ een orthonormale set van vectoren.

Hier behandelen we het algemener probleem dat $\mathbb{A}$ wordt benaderd zoals in Verg. (1) (Verg. (2) voor het geheel-symmetrisch geval), maar waarbij de sets van vectoren niet noodzakelijk orthonormaal zijn. Men noemt dit de *CANDECOMP-analyse* (Canonieke Decompositie - Canonical Decomposition) [2]. Soms wordt ook de benaming *PARAFAC-model* (Parallelle Factoren - Parallel Factors) gebruikt [4]. Zoals we zullen bespreken in Sectie 4, heeft deze analysemethode zeer belangrijke toepassingen op het vlak van blinde identificatie, uitsluitend op basis van HOS (HOOBI - Higher Order Only Blind Identification).

2. CANDECOMP van HO matrices

Voor de berekening van de CANDECOMP van HO matrices werd een algoritme ontwikkeld op basis van een alternerend kleinste kwadraten-mechanisme, d.w.z. eerst wordt de set $\{U_r\}$ aangepast voor constante $\{V_r\}$ en $\{W_r\}$, vervolgens wordt de set $\{V_r\}$ aangepast voor constante $\{U_r\}$ en $\{W_r\}$, enz... Voor dit algoritme kon convergentie worden aangetoond naar een (minstens) locaal optimum. Eventueel kunnen betere optima worden berekend door andere startwaarden te kiezen.

3. CANDECOMP van HO tensoren

Voor geheel-symmetrische HO tensoren kan de methode van Sectie 2 niet worden gebruikt omdat de sets $\{U_r\}$, $\{V_r\}$ en $\{W_r\}$ niet onafhankelijk zijn maar samenvallen. Een variant werd ontwikkeld waarbij iedere kleinste kwadraten-stap in

Sectie 2 wordt gevolgd door een loodrechte projectie op de deelruimte van de geheel-symmetrische HO tensoren. Dit leidt tot een samengesteld benaderingsalgoritme in de zin van Cadzow [1, 3]. Ook hier kunnen eventueel betere resultaten worden bekomen door andere startwaarden te kiezen.

4. Uniciteit van CANDECOMP van HO tensoren - toepassing in blinde identificatie

De CANDECOMP van HO tensoren is in grote mate interessant vanwege de door ons afgeleide uniciteitsstelling:

Stelling 1 Uniciteit van CANDECOMP voor HO tensoren

Indien een tensor $\mathbb{A} \in \Re^{(I \times I \times I)}$ *ontbonden kan worden als*

$$\mathbb{A} = \sum_{p=1}^{P} \lambda_p \, X_p \circ X_p \circ X_p \tag{3}$$

dan is deze decompositie uniek onder de volgende voldoende voorwaarden:

- *elke set van maximaal* I *vectoren, gekozen uit* $\{X_p\}_{1 \leq p \leq P}$, *is lineair onafhankelijk.*
- $P \leq (3I - 2)/2$
- *ordening:* $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_P|$
- *normalisatie:* $\|X_p\| = 1$ *en het grootste element, qua absolute waarde, van* X_p *heeft positief teken* $(1 \leq p \leq P)$.

Deze stelling motiveert de toepassing van het CANDECOMP-algoritme voor blinde identificatie. Indien statistisch onafhankelijke bronsignalen na lineaire propagatie en combinatie worden opgemeten als realisaties van een stochastische vector Y, dan voldoet de derde-orde cumulant van Y aan Verg. (3); de vectoren X_p geven voor elk bronsignaal de propagatiekarakteristiek weer. Door CANDECOMP kunnen dan ruwweg anderhalf keer zoveel bronnen worden geïdentificeerd als er sensoren beschikbaar zijn! Een mogelijk toepassingsgebied is de lineaire propagatie door de ether van AM-gemoduleerde spraaksignalen.

References

[1] J.A. Cadzow, "Signal Enhancement - A Composite Property Mapping Algorithm", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 36, No. 1, Januari 1988, pp. 49-62.

[2] J.D. Carroll, S. Pruzansky, "The CANDECOMP-CANDELINC Family of Models and Methods for Multidimensional Data Analysis", in: H.G. Law, C.W. Snyder, J.A. Hattie, R.P. McDonald (Eds.), *Research Methods for Multimode Data Analysis*, Praeger, N.Y., 1984, pp. 372-402.

[3] B. De Moor, "Total least squares for affinely structured matrices and the noisy realization problem", aanvaard voor publicatie in: *IEEE Trans. on Signal Processing.*

[4] S.E. Leurgans, R.T. Ross, R.B. Abel, "A decomposition for three-way arrays", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 14, No. 4, Oktober 1993, pp. 1064-1083.